# Die Bell'sche Ungleichung

Vortrag im Seminar
Philosophische Aspekte der Quantenmechanik

am 23. Juni 2003*


**Zusammenfassung**

Die Bell'sche Ungleichung liefert ein *negatives* Ergebnis: Sie besagt, dass sich die Natur *nicht* so verhält, wie es unserem Verstand erklärlich wäre.

Die Bell'sche Ungleichung bezieht sich auf das EPR-Experiment. Zuerst wird der Aufbau eines Experiments dieser Art schematisch erklärt. Damit die Bell'sche Unlgeichung verständlich wird, wenden wir uns außerdem einem Experiment zu, das klassische Ergebnisse zeigt, dem Pfeilchen-Experiment. Bei beiden Experimenten werden mehrere Versuche durchgeführt und man zählt Häufigkeiten, daher beschäftigen wir uns mit dem Begriff der Relativen Häufigkeit. Aus diesem Begriff können wir eine Folgerung ziehen, die wir auf unsere Experimente anwenden. Wir sehen dann, was diese Folgerung, die Bell'sche Ungleichung nämlich, für das Pfeilchenexperiment besagt. Schließlich wenden wir die Bell'sche Ungleichung auf das EPR-Experiment an und erhalten einen Widerspruch.


## 1 Der Aufbau des EPR-Experiments

In der Mitte des Versuchsaufbaus befindet sich eine wie auch immer geartete Quelle, die „Teilchen" nach links und rechts verschießt. Der Begriff Teilchen wird hier im weiteren, quantenmechanischen Sinn verwendet: Die Teilchen dürfen Welleneigenschaften zeigen und sie sind gemäß der Heisenbergschen Unschärferelation unscharf. Wir denken konkret an Photonen. Das linke Teilchen heiße $L$, das rechte $R$. Links und rechts befinden

*Überarbeitete Version vom 16. September 2008.

sich zwei Messgeräte, die Eigenschaften der Teilchen messen. Konkret kann man sich vorstellen, dass das linke Messgerät die Polarisation von Teilchen $L$ in einer Raumrichtung misst, und dass das rechte Messgerät die Polarisation von Teilchen $R$ in einer möglicherweise anderen Raumrichtung misst.

Wir beschränken unsere Messungen auf drei Raumrichtungen, die $a$, $b$ und $c$ heißen sollen. Den Wert der Polarisation von $L$ in Richtung $a$, $b$ oder $c$ bezeichnen wir mit $L(a)$, $L(b)$ beziehungseise $L(c)$, wobei wir den Wert $+1$ vergeben, wenn das Teilchen in der entsprechenden Richtung polarisiert ist und den Wert $-1$ vergeben, wenn das Teilchen in der entsprechenden Richtung nicht polarisiert ist. Dies soll von dem linken Messgerät geleistet werden. Genauso misst das rechte Messgert das Teilchen $R$ und vergibt je nachdem, in welcher Richtung es die Polarisation gemessen hat, den Wert $R(a)$, $R(b)$ oder $R(c)$.

Das *Experiment zeigt:* Wenn wir die Polarisation von $L$ und $R$ in derselben Richtung $a$ messen, und wir haben $L(a) = +1$, so gilt immer $R(a) = -1$. Haben wir $L(a) = -1$, so gilt stets $R(a) = +1$. Anderes kommt nicht vor. Mit dem „gilt genau dann, wenn"-Pfeil ⇔ können wir dies formal schreiben:

$$\begin{aligned} L(a) = +1 &\Leftrightarrow R(a) = -1, \\ L(a) = -1 &\Leftrightarrow R(a) = +1. \end{aligned} \tag{A}$$

In den Richtungen $b$ und $c$ gilt dies entsprechend.

## 2 Der Aufbau des Pfeilchen-Experiments

In der Mitte des Versuchsaufbaus befindet sich eine Wurfmaschine, die Pfeilchen nach links und rechts verschießt. Wir nennen die Pfeilchen wiederum $L$ und $R$. Links und rechts befinden sich zwei Messgeräte, die die Lage der Pfeilchen messen. Und zwar sollen sie so konstruiert sein, dass sie feststellen, ob der Winkel zwischen der Richtung, in die der jeweilige Pfeil zeigt und einer gegebenen Raumrichtung kleiner als $90°$ ist. Das linke Messgerät bestimmt auf diese Weise die Lage von $L$, das rechte Messgerät die Lage von $R$.

Im Folgenden verwenden wir für Winkel stets das sogenannte Bogenmaß (dies ist in der Mathematik und Physik üblich). Statt $90°$ verwenden wir also die Zahl $\pi/2$ und sagen: Die Messgeräte stellen fest, ob der Winkel zwischen der Richtung, in die der jeweilige Pfeil zeigt und einer gegebenen Raumrichtung kleiner als $\pi/2$ ist. Im Bogenmaß bekommt die Gradzahl $180°$ den Wert $\pi$, statt $60°$ hat man $\pi/3$, aus $30°$ wird $\pi/6$ und $0°$ hat auch im Bogenmaß den Wert $0$.

Die Messgeräte sollen die Richtung der Pfeilchen mit einer der drei Raumrichtungen $a$, $b$ oder $c$ vergleichen. Das linke Messgerät vergleiche die Richtung von $L$ mit einer dieser Richtungen und vergebe den Wert $L(a)$, $L(b)$ beziehungsweise $L(c)$. Und zwar soll der Wert $+1$ sein, wenn der Winkel zwischen $L$ und der gewählten Richtung $a$, $b$ oder $c$ kleiner als $\pi/2$ war, sonst wird der Wert $-1$ vergeben. Entsprechend liefert das rechte Messgerät für Pfeilchen $R$ den Wert $R(a)$, $R(b)$ oder $R(c)$, der ebenfalls jeweils $+1$ oder $-1$ sein kann.

Damit das Pfeilchen-Experiment etwas mit dem EPR-Experiment zu tun hat, soll die Wurfmaschine so konstruiert sein, dass $L$ und $R$ immer genau in die entgegengesetzte Richtung weisen. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} L(a) = +1 \quad &\Leftrightarrow \quad R(a) = -1, \\ L(a) = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad R(a) = +1, \end{aligned}$$

und für die Richtungen $b$ und $c$ folgt das Entsprechende.

# 3 Relative Häufigkeiten

Wenn wir die Versuche vielmals durchführen und danach fragen, wie oft zum Beispiel der Wert $L(a)$, wenn er gemessen wurde, gleich $+1$ war, so fragen wir nach seiner Häufigkeit. Damit es komplizierter klingt, spricht man von Relativer Häufigkeit und definiert sie wie folgt:

$$\text{Relative Häufigkeit} = \frac{\text{Anzahl der Erfolge}}{\text{Anzahl der Versuche}}.$$

Die Relative Häufigkeit eines Ereignisses $E$ soll mit $\mathrm{rh}(E)$ bezeichnet werden. Dabei soll das Wort Ereignis „möglicher Ausgang des Experiments“ bedeuten, zum Beispiel ist „$L(a) = +1$“ ein solches Ereignis. Als Versuche würden dann alle Experimente zählen, bei denen $L(a)$ bestimmt wurde. Die Anzahl des Eintretens von $E$ kürzen wir mit dem Doppelkreuz $\#$ ab, damit schreibt sich die vorige Formel

$$\mathrm{rh}(E) = \frac{\#E}{n},$$

wenn $n$ die Anzahl der Versuche ist. Für alle Ereignisse $E$ gilt:

$$0 \leq \mathrm{rh}(E) \leq 1,$$

denn mehr Erfolge als Versuche kann es nicht geben. Es seien nun $E_1$, $E_2$ und $E_3$ drei Ereignisse mit der Eigenschaft, dass $E_1$ nur dann eintritt, wenn $E_2$ oder $E_3$ eintritt. Ein Beispiel dafür wäre ein Würfelwurf, bei dem man beobachtet, ob die folgenden Ereignisse eintreten:

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{die Augensumme ist gerade}, \\ E_2 &= \text{man würfelt eine } 2 \text{ oder eine } 4, \\ E_3 &= \text{man würfelt eine } 4 \text{ oder eine } 6. \end{aligned}$$

Offenbar kann $E_1$ nur eintreffen, wenn $E_2$ oder $E_3$ (oder möglicherweise beide) eintreffen. Für Ereignisse, die sich in dieser Art zueinander verhalten, gilt folgende Ungleichung:

$$\boxed{\mathrm{rh}(E_1) \leq \mathrm{rh}(E_2) + \mathrm{rh}(E_3)} \tag{B}$$

Wir wollen diese Ungleichung beweisen. Aus der Voraussetzung folgt, dass immer dann, wenn $E_1$ eintritt, auch $E_2$ oder $E_3$ eintritt. Also ist die Anzahl des Eintreffens von $E_2$ oder $E_3$ mindestens so groß wie die des Eintreffens von $E_1$:

$$\#E_1 \leq \#(E_2 \text{ oder } E_3) \leq \#E_2 + \#E_3.$$

Das zweite Kleiner oder Gleich-Zeichen bezieht sich auf die Versuche, in denen $E_2$ *und* $E_3$ eintreten: Die Zahl $\#E_2 + \#E_3$ ist um die Anzahl der Versuche, in denen $E_2$ *und* $E_3$ eintreten, größer als $\#(E_2 \text{ oder } E_3)$. Nun bezeichne $n$ wieder die Anzahl der Versuche, es folgt:

$$\mathrm{rh}(E_1) = \frac{\#E_1}{n} \leq \frac{\#E_2 + \#E_3}{n} = \frac{\#E_2}{n} + \frac{\#E_3}{n} = \mathrm{rh}(E_2) + \mathrm{rh}(E_3).$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen.

# 4 Die Bell'sche Ungleichung

Wir wollen die Ungleichung (B) nun auf das EPR-Experiment und das Pfeilchen-Experiment anwenden. Wir definieren dazu drei Ereignisse:

$$\begin{aligned} E_1 &= (L(a) = +1,\ R(c) = +1), \\ E_2 &= (L(a) = +1,\ R(b) = +1), \\ E_3 &= (L(b) = +1,\ R(c) = +1). \end{aligned}$$

Es gilt: Wenn $E_1$ eintritt, dann auch $E_2$ oder $E_3$.[1] Wir beweisen, dass aus dem Eintreffen von $E_1$ folgt, dass auch $E_2$ oder $E_3$ eintreffen. Wenn $E_1$ eintrifft, gilt jedenfalls $L(a) = +1$ und $R(c) = +1$. Tritt auch $E_2$ ein? Wenn ja, sind wir fertig, denn dann ist „$E_2$ oder $E_3$" eingetreten. Wenn nein, muss $R(b) = -1$ sein, sonst hätten wir ja $E_2$. Dann muss aber $L(b) = +1$ sein, also muss $E_3$ eintreten. Die Aussage ist bewiesen.

Somit dürfen wir unsere Ereignisse $E_1$, $E_2$ und $E_3$ in (B) einsetzen. In diesem Zusammenhang heißt (B) Bell'sche Ungleichung.

# 5 Anwendung auf das Pfeilchen-Experiment

Wir nehmen an, die Richtungen $a$, $b$ und $c$ liegen in einer Ebene. Dann kann man sie durch einen Winkel festlegen. Die Richtung $a$ werde durch den Winkel $\alpha$ festgelegt, die Richtung $b$ durch den Winkel $\beta$ und $c$ durch $\gamma$. Das Pfeilchen-Experiment ist ein Gedankenexperiment. Aber im Prinzip steht seiner Verwirklichung nichts im Weg, und wenn man es aufbauen würde, so würde man, wenn die Richtung von $L$ und damit $R$ über alle Raumrichtungen gleichverteilt ist, bei einer großen Anzahl von Versuchen feststellen, dass nahezu gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rh}(E_1) &= \frac{|\alpha - \gamma|}{2\pi}, \\
\mathrm{rh}(E_2) &= \frac{|\alpha - \beta|}{2\pi}, \\
\mathrm{rh}(E_3) &= \frac{|\beta - \gamma|}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Dabei misst der Betrag $|\alpha - \gamma|$ den Unterschied der Winkel $\alpha$ und $\gamma$, bei den beiden anderen Beträgen entsprechend.[2] Also: Sind $\alpha$ und $\gamma$ sehr unterschiedlich, beobachtet man $E_1$ häufiger. Das ist auch plausibel, denn wenn $\alpha$ und $\gamma$ gleich oder fast gleich sind, kann $E_1$ nicht beziehungsweise

[1] Anmerkung. Diese Aussage ist für das klassische Pfeilchen-Experiment unproblematisch. Denn egal, welches Ereignis ich messe, $E_1$, $E_2$ oder $E_3$, es ist klar, dass ich genau so gut eines der beiden anderen Ereignisse hätte messen können. Die Messung ist durch die Pfeilchen im Vorhinein festgelegt. Die Anwendbarkeit der Aussage auf das EPR-Experiment hingegen ist fraglich – sonst könnte es am Ende auch keinen Widerspruch geben. So führt die Frage, die sich am Schluss stellt, Wo liegt der Fehler?, zu der Frage: *Wieso* kann ich diese Aussage beim EPR-Experiment *nicht* machen?

[2] Aus rechentechnischen Gründen setzen wir hierbei $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$ voraus. Sonst wäre in den Formeln aufwändig sicherzustellen, dass wir immer den Innenwinkel erwischen.

nur sehr selten eintreten, wie aus (A) folgt. – Wenden wir (B) auf diese Zahlen an. Dies ergibt

$$\frac{|\alpha-\gamma|}{2\pi} \leq \frac{|\alpha-\beta|}{2\pi} + \frac{|\beta-\gamma|}{2\pi}.$$

Wenn man die Ungleichung mit $2\pi$ durchmultipliziert, erhält man

$$\boxed{|\alpha-\gamma| \leq |\alpha-\beta| + |\beta-\gamma|}$$

Dies ist aber etwas Vertrautes, die Dreiecksungleichung. Um sie zu veranschaulichen, beziehen wir sie anstatt auf Winkel auf Punkte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ in der Ebene, dann besagt sie, dass der Abstand der Punkte $\alpha$ und $\beta$ höchstens so groß ist wie die Summer der Abstände von $\alpha$ zu einem dritten Punkt $\beta$ und von $\beta$ zu $\gamma$.

# 6 Anwendung auf das EPR-Experiment

Die Richtungen $a$, $b$, $c$ sollen wieder in einer Ebene liegen und durch Winkel $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ gegeben sein. Das *Experiment zeigt,* dass für eine große Anzahl von Versuchen nahezu gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{rh}(E_1) &= \frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\gamma), \\ \mathrm{rh}(E_2) &= \frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta), \\ \mathrm{rh}(E_3) &= \frac{1}{2}\sin^2(\beta-\gamma). \end{aligned}$$

Anwenden der Bell'schen Ungleichung (B) liefert hier

$$\frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\gamma) \leq \frac{1}{2}\sin^2(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\sin^2(\beta-\gamma).$$

Wenn man die ganze Gleichung mit $2$ multipliziert, wird dies zu

$$\sin^2(\alpha-\gamma) \leq \sin^2(\alpha-\beta) + \sin^2(\beta-\gamma).$$

Diese Gleichung muss also für alle Winkel $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ erfüllt sein. Setzen wir mal die Werte

$$\alpha = \frac{\pi}{3},\ \beta = \frac{\pi}{6},\ \gamma = 0$$

ein. Dann ergibt sich für die in den Sinusfunktionen autauchenden Differenzen

$$\alpha-\beta = \beta-\gamma = \frac{\pi}{6},\ \alpha-\gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Einer Tabelle kann man die Werte des Sinus an diesen Stellen entnehmen,

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Jetzt müssen wir nur noch quadrieren,

$$\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4},\ \sin^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4},$$

um durch Einsetzen in die Ungleichung das erstaunliche Ergebnis

$$\frac{3}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

zu erhalten. Insbesondere werden die relativen Häufigkeiten nach einer gewissen, endlichen Anzahl von Versuchen der Ungleichung (B) widersprechen. Wo liegt der Fehler?

# 7 Versuch einer Auflösung

Da $3/4 > 1/2$ ist und das Experiment der Bell'schen Ungleichung nach ein paar Messungen widerspricht, muss zwischendurch etwas falsch gewesen sein. Aber was? Mein Vorschlag ist, dass der Fehler in Abschnitt 4 zu suchen ist. Die Aussage „Wenn $E_1$ eintritt, dann auch $E_2$ oder $E_3$." kann man für das EPR-Experiment möglicherweise nicht machen, da die Teilchen $L$ und $R$ – so erkläre ich mir das – nur die Eigenschaften haben, die tatsächlich gemessen wurden. Tritt etwa das Ereignis $E_1$ ein, so weiß man: $L$ hat die Eigenschaft $L(a) = +1$ und $R$ hat die Eigenschaft $R(c) = +1$. Die Eigenschaften $L(b)$ und $R(b)$ gibt es nicht, da sie nicht gemessen wurden. Damit kann man auch nicht sagen, $E_2$ oder $E_3$ wären eingetreten oder nicht eingetreten: Denn in der Formulierung der Ereignisse $E_2$ und $E_3$ tauchen die Eigenschaften $L(b)$ beziehungsweise $R(b)$ auf, die es aber nicht gibt, wenn bloß $E_1$ beobachtet wurde.

Möglicherweise gibt es noch weitere und andere Erklärungen für das verletzt sein der Bell'schen Ungleichung.

# Literatur

[1] J. S. Bell: On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. In J. S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Collected papers

on quantum philosophy, Seiten 14-21. Cambridge University Press, Cambridge u. a. 1989 (Reprint). Ursprünglich erschienen in *Physics* 1 (1964) 195-200.

[2] N. David Mermin: Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory. *Physics today*, April 1985, 38-47.