Kleine Nenner bei 2π-periodischen Vektorfeldern*

Joachim Albrecht (Brohl-Lützing)

Zusammenfassung

Wir betrachten ein n-mal stetig differenzierbares Vektorfeld ($n \geq 2$), das von einem Vektor mit n Koordinaten abhängt und in jeder Koordinate 2π-periodisch ist. Es wird vorausgesetzt, dass sich das Vektorfeld nur wenig von einem konstanten, nichtresonanten Frequenzvektor $\omega \in \mathbb{R}^n$ unterscheidet. Ferner wird vorausgesetzt, dass die Stetigkeitsmodule der n-ten partiellen Ableitungen des Vektorfeldes einer Integralbedinung (Endlichkeitsbedingung) genügen, welche allgemeiner als die Hölderbedingung ist. Unter diesen Voraussetzungen beweisen wir, dass es eine stetig differenzierbare Koordinatentransformation gibt, so dass das Vektorfeld in den neuen Koordinaten konstant gleich ω ist.

Einleitung und Ergebnis

Im Folgenden betrachten wir differenzierbare Probleme mit kleinen Nennern an Hand des Beispiels 2π-periodischer Vektorfelder. Dies ist nur ein Modellproblem für die wichtigeren Anwendungen in der Himmelsmechanik – die Untersuchung von Newtons Bewegungsgleichungen für die Planeten – und beim Einbettungssatz von Nash. Wir gehen von einem konstanten Vektorfeld

$$\dot{x} = \omega$$

aus und addieren eine kleine Störung, die Funktion $f(x)$. Gesucht ist nun eine Transformation $x = u(\xi)$, die den ursprünglichen Zustand wieder herstellt (und das richtige Periodizitätsverhalten hat). Damit das klappen kann, brauchen wir noch einen Parameter $\mu \in \mathbb{R}^n$. Ohne diesen wäre das Problem schon für beliebig kleine <u>konstante</u> Vektorfelder f im Allgemeinen nicht zu lösen (siehe [Moser66] Seite 514)[1]. Genauer gilt:

Satz 1.1. *Es sei $n \geq 2$. Der Vektor $\omega \in \mathbb{R}^n$ erfülle mit einem $\gamma > 0$ die Ungleichungen*

$$|\langle \omega\,,\, k \rangle| \geq \frac{\gamma}{|k|^{n-1}} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei in jeder Koordinate 2π-periodisch, n-mal stetig differenzierbar und die Stetigkeitsmodule

$$K_j(\delta) := \sup_{|x-y|\leq\delta} \left| \frac{\partial^n f}{\partial {x_j}^n}(x) - \frac{\partial^n f}{\partial {x_j}^n}(y) \right|, \quad j \in \{1, \ldots, n\}$$

sollen für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ die Bedingung

$$\int_0^1 \frac{K_j(\delta)}{\delta}\, d\delta < \infty$$

*Veröffentlicht in: Heinrich P. Delfosse und Hamid Reza Yousefi (Herausgeber): *>Wer ist weise? der gute Lehr von jedem annimmt< Festschrift für Michael Albrecht zum 65. Geburtstag,* 371-388. Verlag Traugott Bautz, Nordhausen 2005.

[1] Zu den in Satz 1.1 vorausgesetzten Ungleichungen für ω siehe unten Bemerkung 3.2. Zur einführenden Lektüre siehe [Moser66], [Rüssmann79], [Moser01] oder [Arnold89]. Zur populärwissenschaftlichen Lektüre empfehle ich [Diacu96].

erfüllen. Wir betrachten die Schar von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \omega + f(x) + \mu,$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}^n$ ein Parameter ist. Dann gibt es eine Konstante $c_1 = c_1(n, \gamma, K_1 + \ldots + K_n) > 0$, so dass im Fall

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \leq c_1$$

eine stetig differenzierbare Koordinatentransformation $x = u(\xi)$ und ein Parameter μ mit der Eigenschaft existieren, dass die Differentialgleichung in den neuen Koordinaten

$$\dot{\xi} = \omega$$

lautet. Die Funktion $\xi \mapsto u(\xi) - \xi$ ist in jeder Koordinate 2π-periodisch und die Funktionen

$$t \mapsto u(\omega\, t + \mathit{const.})$$

sind stetig differenzierbare Lösungen der gegebenen Differentialgleichung.

Stetigkeitsmodul und Approximation

Definition 2.1. Für $\delta > 0$ setzen wir

$$\mathcal{S}(\delta) := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n \mid |\mathrm{Im}\, x_i| < \delta \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Die Menge aller Funktionen $f : \mathcal{S}(\delta) \to \mathbb{C}^N$, die analytisch, 2π-periodisch in jeder Variablen und beschränkt sind sowie reelle Argumente (Vektoren mit reellen Einträgen) auf reelle Werte abbilden, bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_N(\delta)$.

Definition 2.2. Für Vektoren, Matrizen und Funktionen verwenden wir die folgenden Normen:

$$|x| := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, \text{ falls } x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n \text{ (Maximumnorm)},$$

$$|P| := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^{n} |p_{jk}|\,, \text{ falls } P = (p_{jk}) \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ (Zeilensummennorm)},$$

$$|f|_{\mathcal{M}} := \sup_{x \in \mathcal{M}} |f(x)|\,,$$

falls f eine auf der Menge $\mathcal{M}$ definierte beschränkte Funktion ist (Supremumnorm).

Bemerkung 2.3.

1. Es seien Q, $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und x, $y \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt $|Q^{\mathrm{T}}| \leq n|Q|$ und die Zeilensummennorm ist submultiplikativ: $|QP| \leq |Q||P|$. Da das Skalarprodukt $\langle\, x\,,\, y\,\rangle := x^{\mathrm{T}} y$ nicht von der Maximumnorm induziert ist, gilt auch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung nicht, stattdessen hat man $|\langle\, x\,,\, y\,\rangle| \leq n|x||y|$. Die Zeilensummennorm ist bezüglich der Maximumnorm die Operatornorm, das heißt es gilt $|Qx| \leq |Q||x|$.

2. Mit der Norm $|\cdot|_{\mathcal{S}(\delta)}$ versehen ist der Raum $\mathcal{P}_N(\delta)$ auf Grund des Konvergenzsatzes von Weierstraß ein Banachraum. Für $0 < \varepsilon < \delta$ hat man die Einbettung

$$A : \mathcal{P}_N(\delta) \longrightarrow \mathcal{P}_N(\varepsilon), \quad f \mapsto \text{Einschränkung von } f \text{ auf } \mathcal{S}(\varepsilon).$$

A ist linear und wegen $|f|_{\mathcal{S}(\varepsilon)} \leq |f|_{\mathcal{S}(\delta)}$ für alle $f \in \mathcal{P}_N(\delta)$ stetig. Ist (f_k) eine in $\mathcal{P}_N(\delta)$ beschränkte Folge, so gibt es wegen des Satzes von Montel eine Teilfolge von $(A(f_k))$, die in $\mathcal{P}_N(\varepsilon)$ konvergiert. Diese Eigenschaft der Einbettung A heißt Kompaktheit. Zum Satz von Montel für analytische Funktionen in mehreren Variablen siehe [Rothstein82] Satz 1.16.

Lemma 2.4. *Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banachräume, $D \subseteq X$ konvex und $f : D \to Y$ sei eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann gilt für alle $\delta \geq 0$*

$$\sup_{x,y \in D,\, \|x-y\|_X \leq \delta} \|f(x) - f(y)\|_Y < \infty.$$

Beweis. Für $\delta = 0$ ist die Behauptung klar. Es sei nun $\delta > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit $\|f(x) - f(y)\|_Y \leq 1$ für alle $x,\, y \in D$ mit $\|x - y\|_X \leq \delta_1$. Daraus folgt mit einer natürlichen Zahl $N > \delta/\delta_1$ für alle $x,\, y \in D$ mit $\|x - y\|_X \leq \delta$

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq \sum_{k=1}^{N} \left\| f\left(x + \frac{k-1}{N}(y-x)\right) - f\left(x + \frac{k}{n}(y-x)\right) \right\|_Y \leq N.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Definition 2.5. Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banachräume, $D \subseteq X$ konvex und $f : D \to Y$ sei eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann definiert man den Stetigkeitsmodul K_f von f durch

$$K_f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty), \quad \delta \mapsto K_f(\delta) := \sup_{x,y \in D,\, \|x-y\|_X \leq \delta} \|f(x) - f(y)\|_Y\,.$$

Lemma 2.4 stellt sicher, dass K_f wohldefiniert ist. Das heißt in diesem Fall, dass für alle $\delta \geq 0$ in Übereinstimmung mit dem angegebenen Bildbereich $K_f(\delta) < \infty$ gilt.

Lemma 2.6. *Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banachräume, $D \subseteq X$ konvex und $f : D \to Y$ sei eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann ist der Stetigkeitsmodul K_f von f monoton wachsend, es gilt $K_f(0) = 0$, K_f ist gleichmäßig stetig und man hat die Abschätzung*

$$K_f(N\delta) \leq N K_f(\delta) \text{ für alle } \delta > 0 \text{ und } N \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften ergeben sich aus der Definition von K_f. Wir beweisen, dass K_f in Null stetig ist. Es sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta_0 > 0$ mit

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq \varepsilon \text{ für alle } x, y \in D \text{ mit } \|x - y\|_X \leq \delta_0.$$

Daher gilt $K_f(\delta_0) \leq \varepsilon$. Da K_f monoton wachsend ist, folgt $|K_f(\delta)| = K_f(\delta) \leq \varepsilon$ für alle $\delta \in [0, \delta_0]$. Also ist K_f in 0 stetig.

Für die gleichmäßige Stetigkeit von K_f reicht es zu zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|K_f(s) - K_f(t)| \leq \varepsilon$ für alle $s, t \geq 0$ mit $|s - t| \leq \delta$ gilt. Es sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der Stetigkeit von K_f in Null gibt es ein $\delta > 0$ mit $K_f(|s - t|) \leq \varepsilon$ falls $|s - t| \leq \delta$. Ohne Einschränkung sei $s > t$. Dann gilt für alle $x, y \in D$ mit $\|x - y\|_X \leq s$

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\|_Y &\leq \left\| f(x) - f\left(x + \frac{t}{s}(y-x)\right) \right\|_Y + \left\| f\left(x + \frac{t}{s}(y-x)\right) - f(y) \right\|_Y \\ &\leq K_f(t) + K_f(s-t),\end{aligned}$$

also $K_f(s) \leq K_f(t) + K_f(s-t)$. Es folgt

$$|K_f(s) - K_f(t)| = K_f(s) - K_f(t) \leq K_f(t) + K_f(s-t) - K_f(t) = K_f(s-t) \leq \varepsilon.$$

Also ist K_f gleichmäßig stetig. Wir zeigen die Ungleichung. Dazu seien $\delta > 0$, $N \in \mathbb{N}$ und $x, y \in D$ mit $\|x-y\|_X \leq N\delta$ beliebig. Wir berechnen

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq \sum_{k=1}^{N} \left\| f\left(x + \frac{k-1}{N}(y-x)\right) - f\left(x + \frac{k}{N}(y-x)\right) \right\|_Y \leq N K_f(\delta).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung 2.7. Genau dann gilt $\lim_{\delta\to 0} K_f(\delta)/\delta = 0$, wenn f konstant ist (siehe [Achieser67] Abschnitt 91).

Der folgende Satz (vergleiche [Albrecht05] Satz 2.23) behandelt die Approximation 2π-periodischer differenzierbarer Funktionen durch analytische Funktionen.

Satz 2.8. *Es sei $m \in \mathbb{N}$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch in jeder Variablen und m-mal stetig differenzierbar. Die Stetigkeitsmodule der partiellen Ableitungen $\partial^m f/\partial {x_1}^m, \ldots$, $\partial^m f/\partial {x_n}^m$ seien durch eine monoton wachsende Funktion $K : [0,\infty) \to [0,\infty)$ majorisiert. Es sei $(\varrho_k)_{k=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Nullfolge positiver Zahlen und $\varrho_0 \leq 1$. Dann gibt es eine positive Konstante*

$$c_2 = c_2(n) = 8\, n\, 3^n e^{3n}$$

und eine Folge $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ von Funktionen $f_k \in \mathcal{P}_1(\varrho_k)$, die folgende Abschätzungen erfüllen:

$$|f - f_k|_{\mathbb{R}^n} \leq c_2 K(\varrho_k) {\varrho_k}^m \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right|_{\mathbb{R}^n} \leq c_2 K(\varrho_k) {\varrho_k}^{m-1} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$|f_k - f_{k-1}|_{\mathcal{S}(\varrho_k)} \leq c_2 K(\varrho_{k-1}) {\varrho_{k-1}}^m \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und}$$

$$|f_k|_{\mathcal{S}(\varrho_k)} \leq c_2\, |f|_{\mathbb{R}^n} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Der Satz lässt sich sofort auf vektorwertige Funktionen verallgemeinern, indem man ihn einfach auf jede Koordinatenfunktion einzeln anwendet. Außerdem ist für seine spätere Verwendung noch etwas am Definitionsbereich von f_k zu manipulieren.

Korollar 2.9. *Es seien $m, n, N \in \mathbb{N}$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ sei 2π-periodisch in jeder Variablen und m-mal stetig differenzierbar. Es sei K die Summe der Stetigkeitsmodule der partiellen Ableitungen $\partial^m f_i/\partial {x_j}^m$, $(1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq n)$. Ferner sei die Folge $(\delta_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $\delta_0 \in (0, 1/2)$ und $q \in [\delta_0, 1/2]$ durch $\delta_k := q^k \delta_0$ gegeben. Dann gibt es eine Folge $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ von Funktionen $f_k \in \mathcal{P}_N(q^{-1}\delta_k)$, die mit der Konstanten c_2 aus Satz 2.8 die folgenden Abschätzungen erfüllen:*

$$|f - f_k|_{\mathbb{R}^n} \leq 2c_2 q^{-(m+1)} K(\delta_k) {\delta_k}^m \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right|_{\mathbb{R}^n} \leq 2c_2 q^{-m} K(\delta_k) {\delta_k}^{m-1} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$|f_k - f_{k-1}|_{\mathcal{S}(q^{-1}\delta_k)} \leq 2c_2 q^{-(m+1)} K(\delta_{k-1}) {\delta_{k-1}}^m \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und}$$

$$|f_k|_{\mathcal{S}(q^{-1}\delta_k)} \leq c_2\, |f|_{\mathbb{R}^n} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Wir beweisen das Korollar zunächst für $N = 1$, indem wir Satz 2.8 verwenden. Die Funktion K ist nach Lemma 2.6 monoton wachsend, also dürfen wir sie in Satz 2.8 einsetzen. Für die Folge (ϱ_k) wählen wir $\varrho_k = q^{-1}\delta_k$. Wegen der Ungleichung aus Lemma 2.6 gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$, wenn $M = M(q)$ diejenige natürliche Zahl mit $q^{-1} \leq M < q^{-1} + 1$ bezeichnet,

$$K(q^{-1}\delta_k) \leq K(M\delta_k) \leq (q^{-1} + 1)K(\delta_k) \leq 2q^{-1}K(\delta_k).$$

Es folgt

$$|f - f_k|_{\mathbb{R}^n} \leq c_2 K(q^{-1}\delta_k)\left(q^{-1}\delta_k\right)^m \leq 2c_2 q^{-(m+1)} K(\delta_k){\delta_k}^m.$$

Die anderen Abschätzungen ergeben sich in ähnlicher Weise.

Es sei nun $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Schreiben wir $f = (f_1, \ldots, f_N)^{\mathrm{T}}$, so erfüllt jede Koordinatenfunktion f_i die Voraussetzungen des Korollars mit $N = 1$. Wir erhalten N Funktionenfolgen $(f_{i,k})_{k=0}^{\infty}$ $(1 \leq i \leq N)$ mit $f_{i,k} \in \mathcal{P}_1(q^{-1}\delta_k)$ und den entsprechenden Abschätzungen. Setzen wir $f_k = (f_{1,k}, \ldots, f_{N,k})^{\mathrm{T}}$, so gilt $f_k \in \mathcal{P}_N(q^{-1}\delta_k)$ und da wir für Vektoren die Maximumnorm verwenden, erhalten wir aus den Abschätzungen im Fall $N = 1$, die für jede Komponente einzeln gelten, die gleichen Abschätzungen für die vektorwertigen Funktionen f und f_k. Damit ist alles bewiesen.

Der analytische Satz

Definition 3.1. Für $n \geq 2$, $\tau > 0$ und $\gamma > 0$ sei

$$\Omega(\gamma, \tau) := \left\{ \omega \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |\langle\, \omega\,,\, k\,\rangle| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}^n,\, k \neq 0 \right\}.$$

Von Vektoren $\omega \in \Omega(\gamma, \tau)$ sagt man, dass sie eine Diophant-Bedingung erfüllen.

Bemerkung 3.2.

1. Ist $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)^{\mathrm{T}} \in \Omega(\gamma, \tau)$, so ist ω nichtresonant, das bedeutet die Einträge von ω sind über $\mathbb{Z}$ und damit über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig:

   $$k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n \neq 0 \text{ für alle } k = (k_1, \ldots, k_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{Z}^n,\, k \neq 0.$$

2. Ist $0 < \tau < n - 1$, so sind alle Mengen $\Omega(\gamma, \tau)$, $\gamma > 0$, leer. Für $\tau = n - 1$ gilt, dass die Menge $\Omega(n-1) := \bigcup_{\gamma > 0} \omega(\gamma, n-1)$ n-dimensionales Lebesgue-Maß Null hat. Jedoch hat der Schnitt jeder offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit $\Omega(n-1)$ die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$. Ist schließlich $\tau > n - 1$, so gibt es für fast alle $\omega \in \mathbb{R}^n$ ein $\gamma = \gamma(\omega) > 0$ mit $\omega \in \Omega(\gamma, \tau)$ (siehe [Rüssmann75] und die dortigen Literaturangaben).

Satz 3.3. *Es sei $\tau \geq n - 1 \geq 1$, $\gamma > 0$, $\omega \in \Omega(\gamma, \tau)$ und $\delta \in (0, 1]$. Es sei $f \in \mathcal{P}_n(\delta)$ und $P \in \mathcal{P}_{n\times n}(\delta)$ (also $P : \mathcal{S}(\delta) \to \mathbb{C}^{n\times n}$) mit*

$$|\lambda| \leq |P(x)\lambda| \leq 3|\lambda| \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}^n \text{ und } x \in \mathcal{S}(\delta).$$

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \omega + f(x) + P(x)\lambda, \quad (\lambda \in \mathbb{R}^n).$$

Dann gibt es Konstanten $c_3 = c_3(n, \gamma, \tau) > 0$ und $c_4 = c_4(n, \gamma, \tau) > 0$, so dass es im Fall

$$M := |f|_{\mathcal{S}(\delta)} \leq c_3\delta^{\tau+1}$$

eine Koordinatentransformation $x = u(\xi)$, $\widehat{u} := u - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_n(\delta/2)$ *und einen Parameter* $\lambda \in \mathbb{R}^n$ *mit* $|\lambda| \leq 2M$ *gibt, so dass die betrachtete Differentialgleichung mit diesem Parameter in den neuen Koordinaten* $\dot{\xi} = \omega$ *lautet. Es gilt die Abschätzung*

$$\frac{|\widehat{u}|_{\mathcal{S}(\delta/2)}}{\delta} + |\widehat{u}_\xi|_{\mathcal{S}(\delta/2)} \leq c_4 \frac{M}{\delta^{\tau+1}}, \quad \widehat{u}_\xi \text{ die Jacobimatrix von } \widehat{u}.$$

Bemerkung 3.4. 1. Der Satz wird in [Moser66] Seite 516 f. formuliert. Für $P \neq E$ (E bezeichne die $(n \times n)$-Einheitsmatrix) beachte dort Anmerkung 7 auf Seite 529 f. Genau genommen lautet die Voraussetzung an die Norm von f in [Moser66] $M \leq c_3 \delta^{\tau+2}$ und die rechte Seite der Abschätzung für $\widehat{u}$ ist dort $c_4 M/\delta^{\tau+2}$. Dass man $\tau + 2$ durch $\tau + 1$ ersetzen darf, folgt daraus, dass inzwischen eine bessere Abschätzung für die Lösung des zu Grunde liegenden linearen Problems

$$\text{suche eine Lösung } g : \mathcal{S}(\delta) \to \mathbb{C} \text{ von}$$

$$\langle g_x , \omega \rangle = h, \quad h \in \mathcal{P}_1(\delta) \text{ mit } \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} h(x)\, dx_1 \dots dx_n = 0$$

bekannt ist (siehe die nächste Formel; zur Literatur: vergleiche [Rüssmann75] Theorem 1.1 gegenüber [Moser66] Lemma 1 auf Seite 518).

2. In der Behauptung von Satz 3.3 fällt auf, dass die Transformation u einen kleineren Definitionsbereich als f hat. Man muss den Definitionsbereich verkleinern, um eine Abschätzung für u zu bekommen. Diese Tatsache ist wesentlich und kann nicht geändert werden. Das sieht man bereits an der Lösung der oben in 1. genannten linearen Gleichung. Die Lösung dieser Gleichung[2] erfüllt nämlich mit einer Konstanten $c = c(n, \tau) > 0$ die Abschätzung ([Rüssmann75] Theorem 1.1)

$$|g|_{\mathcal{S}(\delta - r)} \leq \frac{c}{\gamma r^\tau} |h|_{\mathcal{S}(\delta)} \text{ für alle } r \in (0, \delta).$$

Da die rechte Seite der Ungleichung für $r \to 0$ beliebig groß wird, ist g auf $\mathcal{S}(\delta)$ im Allgemeinen nicht beschränkt, obwohl dies für h der Fall ist. Daher kann man auch nicht sicherstellen, dass $g \in \mathcal{P}_n(\delta)$ gilt (vergleiche Bemerkung 2.3 2.)

Lemma 3.5. *Es sei* $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *und es gelte* $|U - E| \leq 1/2$ *(*E *die* $(n \times n)$*-Einheitsmatrix). Es sei* $P := 2U$*. Dann gilt*

$$|\lambda| \leq |P\lambda| \leq 3|\lambda| \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Es sei $\lambda \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wegen $|P| \leq |2U - 2E| + |2E| \leq 3$ und Bemerkung 2.3 1. ist $|P\lambda| \leq 3|\lambda|$. Außerdem gilt

$$|P\lambda| = |U(2\lambda) - 2\lambda + 2\lambda| \geq |2\lambda| - |(U - E)(2\lambda)| \geq 2|\lambda| - \frac{1}{2} 2|\lambda| = |\lambda|.$$

Da $\lambda \in \mathbb{R}^n$ beliebig war, folgt die Behauptung.

[2] Es gibt genau eine Lösung g der Gleichung, die die Bedingungen erfüllt, dass sie analytisch und 2π-periodisch ist und dass

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} g(x)\, dx_1 \dots dx_n = 0$$

gilt. Dieses Integral bezeichnet man als den Mittelwert von g.

Weitere Hilfsmittel

Die folgenden beiden einfacheren Sätze zitiere ich aus meiner Dissertation [Albrecht05], dort sind es die Sätze A.3 und A.11.

Satz 4.1. *Es sei $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Dann ist jede Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, welche die Abschätzung*

$$|U - S| \leq h\frac{1}{|S^{-1}|} \text{ mit einem } h \in (0,1)$$

erfüllt, ebenfalls invertierbar. Außerdem gilt

$$|U^{-1}| \leq \frac{|S^{-1}|}{1-h} \text{ und } |U^{-1} - S^{-1}| \leq h\frac{|S^{-1}|}{1-h}.$$

Satz 4.2. *Es seien M, $s > 0$ und $f : \{x \in \mathbb{C}^n \,|\, |x| < s\} \to \mathbb{C}^m$ sei eine analytische Funktion mit*

$$|f|_{\{x\in\mathbb{C}^n \,|\, |x|<s\}} \leq M.$$

Dann genügt die Jacobimatrix von f für alle $0 < \varepsilon < s$ der Abschätzung

$$|f_x|_{\{x\in\mathbb{C}^n \,|\, |x|<s-\varepsilon\}} \leq \frac{M}{\varepsilon}.$$

Satz 4.3. *Es seien $u_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$ stetig differenzierbare Funktionen, die für $k \to \infty$ punktweise gegen die Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ konvergieren. Die Folge der Ableitungen (Jacobimatrizen) $u_{kx} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ konvergiere gleichmäßig. Dann ist u stetig differenzierbar und es gilt*

$$u_x(x) = \lim_{k\to\infty} u_{kx}(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Es seien $1 \leq i, j \leq n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir bezeichnen die j-te Koordinatenfunktion von u und u_k mit u_j beziehungsweise u_{kj} und definieren Funktionen g und g_k von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ durch

$$g(t) := u_j(x + t\, e_i) \text{ und } g_k(t) := u_{kj}(x + t\, e_i).$$

Dann folgt mit dem entsprechenden eindimensionalen Satz für die partielle Ableitung nach x_i

$$u_{jx_i}(x) = \frac{dg}{dt}(0) = \lim_{k\to\infty} \frac{dg_k}{dt}(0) = \lim_{k\to\infty} u_{kjx_i}(x).$$

Da $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig war, ist u_j partiell differenzierbar nach x_i. Da die Funktionen u_{kjx_i} stetig sind und gleichmäßig konvergieren, ist u_j stetig partiell differenzierbar nach x_i. Da i und j beliebig waren, folgt die Behauptung.

Beweis

Lemma 5.1. *Es sei K die Summe der in Satz 1.1 definierten Stetigkeitsmodule $K_1, \ldots, K_n$. Wir definieren eine Folge $(\vartheta_k)_{k=0}^{\infty}$ durch*

$$\vartheta_k := 3 \cdot 4^{n+1} c_2 {c_3}^{-1} K(\delta_k), \text{ wobei } \delta_k := \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta_0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist (ϑ_k) monoton fallend. Es gibt eine Konstante $c_5 = c_5(n, \gamma, K) \in (0, 1/2)$, so dass für $\delta_0 \in (0, c_5]$ gilt: $\vartheta_0 \leq 1$ und

$$c_3 c_4 \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k \leq \ln 4 - \ln 3.$$

Beweis. Jeder der Stetigkeitsmodule $K_1, \ldots, K_n$ ist nach Lemma 2.6 eine monoton wachsende Funktion. Also ist auch ihre Summe K monoton wachsend, die Folge (ϑ_k) demnach monoton fallend. Wegen der Integralbedingung an die Stetigkeitsmodule K_j erfüllt auch K diese Bedingung:

$$\int_0^1 \frac{K(\delta)}{\delta} d\delta \leq \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \frac{K_j(\delta)}{\delta} d\delta < \infty.$$

Wegen der Monotonie von K können wir wie folgt abschätzen:

$$c_3 c_4 \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k = 3 \cdot 4^{n+1} c_2 c_4 \sum_{k=1}^{\infty} K(\delta_k) \leq 3 \cdot 4^{n+1} c_2 c_4 \int_0^{\infty} K(\delta_k)\, dk.$$

Mit der Substitution $s = \delta_k = (1/2)^k \delta_0$ erhalten wir

$$c_3 c_4 \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k \leq 3 \cdot 4^{n+1} \frac{c_2 c_4}{\ln 2} \int_0^{\delta_0} \frac{K(s)}{s}\, ds.$$

Da K wie eingangs erwähnt die Integralbedingung erfüllt, wird die rechte Seite der Abschätzung beliebig klein, wenn δ_0 klein genug gewählt wird. Außerdem wird auch ϑ_0 beliebig klein, wenn δ_0 klein genug ist: Denn die Funktion K ist stetig und lässt die Null fest, weil dies für jede der Funktionen K_j gilt. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 5.2. *Die Folgen (ϑ_k) und (δ_k) seien wie in Lemma 5.1 mit $\delta_0 := c_5$ festgelegt. Es seien ω der Vektor und f die Funktion aus Satz 1.1 und es sei (f_k) die gemäß Korollar 2.9 gebildete Funktionenfolge. Dann gibt es eine Konstante $c_1 = c_1(n, \gamma, K) > 0$, so dass es im Fall*

$$|f|_{\mathbb{R}^n} \leq c_1$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ Vektoren $\mu_k \in \mathbb{R}^n$ und eine Koordinatentransformation

$$x = u_k(\xi),\ u_k : \mathcal{S}(\delta_k/2) = \mathcal{S}(\delta_{k+1}) \longrightarrow \mathcal{S}(\delta_k),\ \widehat{u}_k := u_k - \mathrm{id} \in \mathcal{P}_n(\delta_k/2)$$

gibt, welche die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \omega + f_k(x) + \mu_k$$

auf die Form $\dot{\xi} = \omega$ transformiert. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gelten die Abschätzungen

$$|f - f_k|_{\mathbb{R}^n} \leq c_3 {\delta_k}^n \vartheta_k,$$

$$|u_{k\xi} - E|_{\mathcal{S}(\delta_k/2)} \leq \exp\left(c_3 c_4 \sum_{\ell=0}^{k} \vartheta_\ell\right) - 1,$$

$$|u_k - u_{k-1}|_{\mathcal{S}(\delta_k/2)} \leq \frac{4}{3} c_3 c_4 \delta_k \vartheta_k \text{ und}$$

$$|\mu_k - \mu_{k-1}| \leq 4 c_3 {\delta_k}^n \vartheta_k,$$

wobei wir $u_{-1} := \mathrm{id}$ und $\mu_{-1} := 0$ setzen.

Beweis. In Korollar 2.9 ist $N = n$ und $q = 1/2$ einzusetzen. Die Funktionen $f_k \in \mathcal{P}_n(2\delta_k)$ erfüllen die Abschätzungen

$$|f - f_k|_{\mathbb{R}^n} \leq 2^{n+2} c_2 K(\delta_k){\delta_k}^n \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

$$|f_k - f_{k-1}|_{\mathcal{S}(2\delta_k)} \leq 2^{n+2} c_2 K(\delta_{k-1}){\delta_{k-1}}^n \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und}$$

$$|f_k|_{\mathcal{S}(2\delta_k)} \leq c_2 \, |f|_{\mathbb{R}^n} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Daraus können wir schon die behaupteten Ungleichungen für $f - f_k$ folgern. Gemäß der Definition von ϑ_k in Lemma 5.1 erhalten wir nämlich für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$|f - f_k|_{\mathbb{R}^n} \leq 3 \cdot 4^{n+1} c_2 K(\delta_k){\delta_k}^n = c_3 \vartheta_k {\delta_k}^n.$$

Die übrigen Behauptungen beweisen wir induktiv.

Induktionsanfang. Wir setzen

$$c_1 = c_1(n, \gamma, K) := {c_5}^n K(c_5).$$

Nach Korollar 2.9 und weil $\delta_0 = c_5$ ist, gilt dann

$$|f_0|_{\mathcal{S}(\delta_0)} \leq c_2 \, |f|_{\mathbb{R}^n} \leq c_2 c_1 \leq c_2 {\delta_0}^n K(\delta_0) \leq 3 \cdot 4^{n+1} c_2 {\delta_0}^n K(\delta_0) = c_3 {\delta_0}^n \vartheta_0.$$

Wegen $n = \tau + 1$ und $\vartheta_0 \leq 1$ können wir Satz 3.3 auf die Differentialgleichung $\dot{x} = \omega + f_0(x) + 2\lambda$ anwenden (setze in Satz 3.3 noch $P = 2E$ ein) und erhalten eine Transformation $x = u(\xi) =: u_0(\xi)$, $\widehat{u}_0 \in \mathcal{P}_n(\delta_0/2)$, $u_0 : \mathcal{S}(\delta_0/2) \to \mathcal{S}(\delta_0)$, welche die Differentialgleichung für einen geeigneten Parameter λ in die Gestalt $\dot{\xi} = \omega$ transformiert. Es gelten die Abschätzungen $|\lambda| \leq 2c_3\vartheta_0{\delta_0}^n$ und

$$\frac{|\widehat{u}_0|_{\mathcal{S}(\delta_0/2)}}{\delta_0} + |\widehat{u}_{0\xi}|_{\mathcal{S}(\delta_0/2)} \leq c_3 c_4 \vartheta_0.$$

Daraus ergibt sich die behauptete Abschätzung für $u_0 - \mathrm{id} = \widehat{u}_0$. Aus $1 + t \leq e^t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt

$$|u_{0\xi} - E|_{\mathcal{S}(\delta_0/2)} \leq e^{c_3 c_4 \vartheta_0} - 1.$$

Setzen wir noch $\mu_0 := 2\lambda$, so haben wir die richtige Differentialgleichung $\dot{x} = \omega + f_0(x) + \mu_0$ transformiert und mit der Abschätzung

$$|\mu_0| \leq 4c_3{\delta_0}^n\vartheta_0$$

ist für den Induktionsanfang alles gezeigt.

Induktionsschritt. Wir nehmen nun an, dass die Behauptung für ein $k \in \mathbb{N}_0$ richtig sei. Dann hat die Differentialgleichung $\dot{x} = \omega + f_k(x) + \mu_k$ in den Koordinaten $x = u_k(\xi)$ die Gestalt $\dot{\xi} = \omega$. Wir wenden die Transformation $x = u_k(\xi)$ nun auf die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \omega + f_{k+1}(x) + \mu_k + 2\lambda = \omega + f_k(x) + \mu_k + (f_{k+1} - f_k)(x) + 2\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}^n)$$

an. Die ist wegen $f_{k+1} \in \mathcal{P}_n(2\delta_{k+1})$ und $u_k(\mathcal{S}(\delta_{k+1})) \subseteq \mathcal{S}(2\delta_{k+1})$ erlaubt. Die Differentialgleichung lautet in den neuen Koordinaten

$$\dot{\xi} = \omega + u_{k\xi}(\xi)^{-1}(f_{k+1}(u_k(\xi)) - f_k(u_k(\xi))) + 2u_{k\xi}(\xi)^{-1}\lambda.$$

Wir wollen Satz 3.3 auf diese Differentialgleichung anwenden. Dazu benennen wir die Variable ξ erstmal wieder in x um,

$$\dot{x} = \omega + u_{kx}(x)^{-1}\left(f_{k+1}(u_k(x)) - f_k(u_k(x))\right) + 2u_{kx}(x)^{-1}\lambda.$$

Nun setzen wir in Satz 3.3

$$\delta = \delta_{k+1},\ f = {u_{kx}}^{-1}(f_{k+1}\circ u_k - f_k \circ u_k) \text{ und } P = 2{u_{kx}}^{-1}$$

ein und prüfen die Voraussetzung an P nach. Gemäß Lemma 3.5 reicht es,

$$\left|u_{kx}^{-1} - E\right|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1})} \le \frac{1}{2}$$

zu zeigen. Nach der Induktionsvoraussetzung und Lemma 5.1 gilt

$$|u_{kx} - E|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1})} \le \exp\left(c_3c_4\sum_{\ell=0}^{k}\vartheta_\ell\right) - 1 \le \exp\left(c_3c_4\sum_{\ell=0}^{\infty}\vartheta_\ell\right) - 1 \le \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} =: h.$$

Mit Satz 4.1 (dort ist $S = E$ und $U = u_{kx}$ einzusetzen) erhalten wir

$$\left|{u_{kx}}^{-1} - E\right|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1})} \le \frac{h}{1-h} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Also erfüllt $P = 2{u_{kx}}^{-1}$ die Voraussetzung von Satz 3.3. Um die dort vorausgesetzte Abschätzung für f zu erhalten, berechnen wir mit Satz 4.1 und Korollar 2.9

$$\begin{aligned}|f|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1})} &\le \left|{u_{kx}}^{-1}\right|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1})}|f_{k+1} - f_k|_{\mathcal{S}(\delta_k)} \le \frac{3}{2}2^{n+2}c_2K(\delta_k){\delta_k}^n = 3\cdot 2^{n+1}c_2K(2\delta_{k+1})2^n{\delta_{k+1}}^n \\ &\le 3\cdot 2^{2n+2}c_2K(\delta_{k+1}){\delta_{k+1}}^n = 3\cdot 4^{n+1}c_2K(\delta_{k+1}){\delta_{k+1}}^n = c_3\vartheta_{k+1}{\delta_{k+1}}^n.\end{aligned}$$

Da hier $n = \tau + 1$ ist und stets $\vartheta_k \le 1$ gilt, können wir Satz 3.3 anwenden und erhalten eine Transformation $x = u(\xi)$, $u : \mathcal{S}(\delta_{k+1}/2) \to \mathcal{S}(\delta_{k+1})$, welche die Differentialgleichung für x auf die Gestalt $\dot{\xi} = \omega$ bringt. Der Parameter λ und u erfüllen die Abschätzungen

$$|\lambda| \le 2\,|f|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1})} \le 2c_3\vartheta_{k+1}{\delta_{k+1}}^n \text{ und}$$

$$\frac{|\widehat{u}|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)}}{\delta_{k+1}} + |\widehat{u}_\xi|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)} \le c_4\frac{|f|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1})}}{{\delta_{k+1}}^n} \le c_3c_4\vartheta_{k+1}.$$

Wir setzen $u_{k+1} := u_k \circ u$ und $\mu_{k+1} := \mu_k + 2\lambda$ und beweisen die behaupteten Abschätzungen. Mit der Induktionsvoraussetzung, der Abschätzung für $\widehat{u}_\xi$ und der für alle $t \in \mathbb{R}$ geltenden Ungleichung $1 + t \le e^t$ folgt

$$\begin{aligned}|u_{k+1,\xi} - E|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)} &= \left|(u_k\circ u)_\xi - E\right|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)} = |(u_{k\xi}\circ u)\cdot u_\xi - E|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)} \\ &\le |(u_{k\xi}\circ u - E)\cdot u_\xi + u_\xi - E|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)} \\ &\le |u_{k\xi} - E|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1})}\,|u_\xi|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)} + |u_\xi - E|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)} \\ &\le \left(\exp\left(c_3c_4\sum_{\ell=0}^{k}\vartheta_\ell\right) - 1\right)(c_3c_4\vartheta_{k+1} + 1) + c_3c_4\vartheta_{k+1} \\ &= (1 + c_3c_4\vartheta_{k+1})\exp\left(c_3c_4\sum_{\ell=0}^{k}\vartheta_\ell\right) - 1 - c_3c_4\vartheta_{k+1} + c_3c_4\vartheta_{k+1} \\ &\le \exp\left(c_3c_4\sum_{\ell=0}^{k+1}\vartheta_\ell\right) - 1.\end{aligned}$$

Weiter erhalten wir für beliebiges $\xi \in \mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)$

$$\begin{aligned} |u_{k+1}(\xi) - u_k(\xi)| &= |u_k(u(\xi)) - u_k(\xi)| = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(u_k(\xi + t\widehat{u}(\xi)) \right) \, dt \right| \\ &\le \int_0^1 |u_{k\xi}(\xi + t\widehat{u}(\xi))| \, |\widehat{u}(\xi)| \, dt \le |u_{k\xi}|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1})} \, |\widehat{u}|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)} \\ &\le \exp\left(c_3 c_4 \sum_{\ell=0}^{k} \vartheta_\ell \right) c_3 c_4 \delta_{k+1} \vartheta_{k+1} \le \frac{4}{3} c_3 c_4 \delta_{k+1} \vartheta_{k+1}. \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$|\mu_{k+1} - \mu_k| = |2\lambda| \le 4 c_3 \vartheta_{k+1} {\delta_{k+1}}^n.$$

Damit sind die drei behaupteten Ungleichungen bewiesen. Es bleibt nachzuprüfen, dass u_{k+1} die weiteren gewünschten Eigenschaften hat. u_{k+1} ist auf $\mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)$ definiert. Da u_k und u analytische Funktionen sind, die reelle Argumente auf reelle Werte abbilden, gilt dies auch für $u_{k+1} = u_k \circ u$. Wir beweisen, dass u_{k+1} nach $\mathcal{S}(\delta_{k+1})$ abbildet. Da u_{k+1} für reelle Argumente reelle Werte liefert, können wir für alle $\xi \in \mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)$ mit der ersten oben bewiesenen Ungleichung und Lemma 5.1 abschätzen:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} u_{k+1}(\xi)| &\le |\operatorname{Im} \xi| + |\operatorname{Im} \left(u_{k+1}(\xi) - \xi \right)| < \frac{\delta_{k+1}}{2} + \left| \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(\widehat{u}_{k+1} \left(\operatorname{Re} \xi + i \, t \operatorname{Im} \xi \right) \right) \, dt \right| \\ &\le \frac{\delta_{k+1}}{2} + \int_0^1 |\widehat{u}_{k+1,\xi}(\operatorname{Re} \xi + i \, t \operatorname{Im} \xi)| \, |i \operatorname{Im} \xi| \, dt \le \frac{\delta_{k+1}}{2} + |\widehat{u}_{k+1,\xi}|_{\mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)} \frac{\delta_{k+1}}{2} \\ &\le \frac{\delta_{k+1}}{2} \left(1 + \exp\left(c_3 c_4 \sum_{\ell=0}^{k+1} \vartheta_\ell \right) - 1 \right) \le \frac{4}{3} \frac{\delta_{k+1}}{2} < \delta_{k+1}. \end{aligned}$$

Also bildet u_{k+1} wie gewünscht ab. Für $\widehat{u}_{k+1} \in \mathcal{P}_n(\delta_{k+1}/2)$ fehlt noch die Periodizität von $\widehat{u}_{k+1}$. Es sei dazu e_j der j-te Basisvektor der $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$ ($1 \le j \le n$). Dann gilt wegen der Periodizität von $\widehat{u}_k$ und $\widehat{u}$

$$\begin{aligned} u_{k+1}(\xi + 2\pi \, e_j) - \xi - 2\pi \, e_j &= u_k(u(\xi + 2\pi \, e_j)) - \xi - 2\pi \, e_j = u_k(u(\xi) + 2\pi \, e_j) - \xi - 2\pi \, e_j \\ &= u_k(u(\xi)) + 2\pi \, e_j - \xi - 2\pi \, e_j = u_{k+1}(\xi) - \xi. \end{aligned}$$

Schließlich bleibt festzustellen, dass wir die Transformation $x = u_{k+1}(\xi)$ wegen $u_{k+1}(\mathcal{S}(\delta_{k+1}/2)) \subseteq \mathcal{S}(\delta_{k+1})$ auf die Differentialgleichung $\dot{x} = \omega + f_{k+1} + \mu_{k+1}$ anwenden dürfen. Da dies den selben Effekt hat, wie zuerst die Transformation u_k und dann u zu benutzen, lautet die Differentialgleichung in den neuen Koordinaten $\dot{\xi} = \omega$. Damit ist Satz 5.2 bewiesen.

Beweis von Satz 1.1. Der in Satz 5.2 beschriebene iterative Prozess konvergiert und führt zu einer Lösung des eingangs gestellten Problems, für die Schar von Differentialgleichungen $\dot{x} = \omega + f(x) + \mu$ einen Parameter μ und eine Transformation $x = u(\xi)$ zu finden, so dass die Differentialgleichung mit diesem μ in den neuen Koordinaten $\dot{\xi} = \omega$ lautet.
Die Folge der Vektoren μ_k ist konvergent, denn es gilt (beachte $\mu_{-1} = 0$ und $\delta_0 = c_5$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k - \mu_{k-1}| &\le \sum_{k=0}^{\infty} 4 c_3 {\delta_k}^n \vartheta_k = \sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot 4^{n+2} c_2 {\delta_k}^n K(\delta_k) \le 3 \cdot 4^{n+2} c_2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right)^k {\delta_0}^n K(\delta_0) \\ &= 3 \cdot 4^{n+2} c_2 {c_5}^n K(c_5) \frac{1}{1 - 2^{-n}} = 3 \cdot 4^{n+2} c_1 c_2 \frac{1}{1 - 2^{-n}} \le 4^{n+3} c_1 c_2. \end{aligned}$$

Die Funktionenfolge (f_k) konvergiert nach Satz 5.2 gleichmäßig gegen f, denn wir erhalten

$$|f - f_k|_{\mathbb{R}^n} \leq c_3 {\delta_k}^n \vartheta_k \leq c_3 \left(\frac{1}{2^n}\right)^k {\delta_0}^n \vartheta_0 \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty).$$

Zur Konvergenz der u_k: Die Folge (u_k) ist auf $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig konvergent. Dies folgt (beachte $u_{-1} = \mathrm{id}$ und $\vartheta_0 \leq 1$) aus

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k - u_{k-1}|_{\mathbb{R}^n} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{3} c_3 c_4 \delta_k \vartheta_k \leq \frac{4}{3} c_3 c_4 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta_0 \vartheta_0 \leq \frac{8}{3} c_3 c_4 c_5.$$

Vor allem aber konvergiert die Folge der Ableitungen $(u_{k\xi})$ gleichmäßig. Mit der Cauchyschen Abschätzung für die Ableitung Satz 4.2 erhalten wir nämlich aus Satz 5.2

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} |u_{k\xi} - u_{k-1,\xi}|_{\mathbb{R}^n} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_{k\xi} - u_{k-1,\xi}|_{\mathcal{S}(\delta_k/4)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\delta_k} |u_k - u_{k-1}|_{\mathcal{S}(\delta_k/2)} \\ &\leq \frac{16}{3} c_3 c_4 \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta_k \leq \frac{16}{3} \ln \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Aus Satz 4.3 folgt nun, dass die Grenzfunktion $u := \lim_{k\to\infty} u_k$ stetig differenzierbar ist und dass $u_\xi = \lim_{k\to\infty} u_{k\xi}$ gilt. Ferner folgt aus Satz 5.2

$$|u_\xi - E|_{\mathbb{R}^n} = \lim_{k\to\infty} |u_{k\xi} - E|_{\mathbb{R}^n} \leq \exp\left(c_3 c_4 \sum_{\ell=0}^{\infty} \vartheta_\ell\right) - 1 \leq \frac{1}{3},$$

also ist u_ξ nach Lemma 4.1 invertierbar. Satz 5.2 besagt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$u_{k\xi}(\xi)^{-1} \left(\omega + f_k(u_k(\xi)) + \mu_k\right) = \omega$$

oder gleichbedeutend

$$\omega + f_k(u_k(\xi)) + \mu_k = u_{k\xi}(\xi)\omega.$$

Lassen wir nun $k \to \infty$ gehen, so erhalten wir auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz der f_k und der Stetigkeit von f für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\omega + f(u(\xi)) + \mu = u_\xi(\xi)\omega \;\Leftrightarrow\; u_\xi(\xi)^{-1} \left(\omega + f(u(\xi)) + \mu\right) = \omega.$$

Das bedeutet, dass die Differentialgleichung $\dot{x} = \omega + f(x) + \mu$ durch die Transformation $x = u(\xi)$ auf die Form $\dot{\xi} = \omega$ gebracht wird. Das war zu beweisen.

Literatur

[Achieser67] Naum I. Achiezer: *Vorlesungen über Approximationstheorie.* Akademie-Verlag, 2. Auflage Berlin 1967.

[Albrecht05] Joachim Albrecht: *Über die Stabilität invarianter Tori in Hamiltonschen Systemen, die bis auf eine endlich oft differenzierbare Störung analytisch und integrabel sind.* Dissertation Johannes Gutenberg-Universität Mainz 2005.

[Arnold89] Vladimir I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, New York ²1989.

[Diacu96] Florin Diacu und Philip Holmes: *Celestial Encounters.* Princeton Science Library. Princeton University Press 1996.

[Moser66] Jürgen Moser: A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations I, II. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* 20 (1966) 265-315, 499-535.

[Moser01] Jürgen Moser: *Stable and Random Motions in Dynamical Systems.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press 2001.

[Rothstein82] Wolfgang Rothstein und Klaus Kopfermann: *Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher.* Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich 1982.

[Rüssmann75] Helmut Rüssmann: On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equations of first order with constant coefficients on the torus. In: Jürgen Moser (Herausgeber): *Dynamical Systems, Theory and Applications.* Lecture Notes in Physics Band 38, 598-624. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1975.

[Rüssmann79] Helmut Rüssmann: Konvergente Reihenentwicklungen in der Störungstheorie der Himmelsmechanik. In: Konrad Jacobs (Herausgeber): *Selecta Mathematica V.* Heidelberger Taschenbücher 201, 93-260. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1979.