Parameterunsicherheit und Portfolio-Optimierung – die Lösung von Black und Litterman

Dr. Joachim Albrecht
Vortrag im Arbeitskreis Quantitative Methoden
der Risk Management Association RMA
am Institut für Wirtschaftsforschung Halle IWH

01.02.2008

Markowitz Optimierung (1)

mit Leerverkäufen $\Rightarrow$ explizite Lösung

erwartete Renditen $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^d$,

Kovarianzmatrix $\Sigma = (\Sigma_{j\,k})_{j,k=1}^{d}$ ($\Rightarrow$ Volatilitäten $\sigma_j = \sqrt{\Sigma_{jj}}$)

Allokation $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)^{\mathrm{T}}$, Budgetbedingung $\alpha_1 + \ldots + \alpha_d = 1$

erwarteter Return $\alpha^{\mathrm{T}}\mu$, erwartete Volatilität $\alpha^{\mathrm{T}}\Sigma\alpha$.

Suche α mit maximalem Return bei gegebener Vola.

Black Scholes Modell

$$d\,S_i(t) = S_i(t)\,(\mu_i\,dt + \sigma_i\,dW_i(t))$$

- S_i Preis von Asset i
- μ_i Drift
- σ_i Volatilität
- $W_i(t)$ Brownsche Bewegung

$$S_i(t+\delta t) = S_i(t)\left((1+\mu_i)\,\delta t + \sigma_i\sqrt{\delta t}\,\varepsilon_i(t)\right)$$

- $\varepsilon_i \overset{d}{=} N(0,1)$

$$S_i(t) = c\,\exp\left\{\left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)\,t + \sigma_i\,W_i(t)\right\}$$

Diskrete und logarithmierte Renditen

$$R_i(t, t+\delta t) = \frac{S_i(t+\delta t)}{S_i(t)} - 1 \overset{d}{=} N(\mu_i \,\delta t, \sigma_i^2 \,\delta t)$$

Zinseszinseffekt

$$R_i(t, t+2\delta t) = R_i(t, t+\delta t) + R_i(t+\delta t, t+2\delta t) + R_i(t, t+\delta t)R_i(t, t+2\delta t)$$

Logarithmierte Rendite

$$\begin{aligned} X_i(t, t+\delta t) &= \ln\{R_i(t, t+\delta t) + 1\} = \ln S_i(t+\delta t) - \ln S_i(t) \\ &= \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right) \delta t + \sigma_i \, (W_i(t+\delta t) - W_i(t)) \\ &= \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right) \delta t + \sigma_i \sqrt{\delta t}\, \varepsilon_i \end{aligned}$$

Schätzen der Kovarianzmatrix

d Zeitreihen mit jeweils n beobachteten logarithmierten Returns

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nd} \end{pmatrix}$$

$$\widehat{m} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j, \quad x_j = (x_{j1}, \dots, x_{jd})^{\mathrm{T}} \; (1 \le j \le n)$$

$y_{jk} = x_{jk} - \widehat{m}_k$ zentrierte log-Returns, $Y = (y_{jk})$ $(1 \le j \le n,\, 1 \le k \le d)$

$$\widehat{\Sigma}_X = \frac{1}{n-1} \, Y^{\mathrm{T}} Y$$

Schätzer für die Kovarianzmatrix der originalen Returns

$$\widehat{\Sigma}_{k\ell} = \exp\left(\widehat{m}_k + \frac{\widehat{\Sigma}_{Xkk}}{2} + \widehat{m}_\ell + \frac{\widehat{\Sigma}_{X\ell\ell}}{2} \right) \left(e^{\widehat{\Sigma}_{Xk\ell}} - 1 \right)$$

Markowitz Optimierung (2)

Minimum Varianz Portfolio

$$\alpha_{\mathrm{MV}} = \frac{1}{b^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}b}\,\Sigma^{-1}b, \quad b = (1,\ldots,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^d$$

Portfolio mit dem besten Rendite-Risiko-Verhältnis
(Sharpe-Kriterium, falls risikoloser Zins = 0)

$$\alpha_{\mathrm{Sharpe}} = \frac{1}{b^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\mu}\,\Sigma^{-1}\mu$$

beliebiges Portfolio auf der Effizienzlinie

$$\alpha_t = (1-t)\alpha_{\mathrm{MV}} + t\,\alpha_{\mathrm{Sharpe}}$$

Black Litterman Formel

$$\boxed{\widehat{\mu}_{\mathrm{BL}} = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\widehat{\mu}_{\mathrm{Markt}} + P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}\widehat{q}_{\mathrm{Investor}}\right]}$$

- τ Gewicht Marktmeinung gegen Meinung des Investors
- P Auswahlmatrix (über welche Assetklassen der Investor eine Meinung hat)
- Ω Volatilität der Meinungen des Investors (wie sicher er sich ist)
- $\widehat{q}_{\mathrm{Investor}}$ welchen Return der Investor für die mit P ausgewählten Assetklassen erwartet
- $\widehat{\mu}_{\mathrm{Markt}}$ implizite Returns, die sich aus dem Marktportfolio beziehungsweise Benchmarkportfolio ergeben

Black Litterman Verfahren
Markterwartungen bestimmen: μ_{Markt}

Gegeben Allokation α_{Markt} mit Ertragserwartung $\mu_{\text{Markt}}^{\text{PF}}$

$$\mu_{\text{Markt}}^{\text{PF}} = \alpha_{\text{Markt}}^{\text{T}} \, \mu_{\text{Markt}} = \alpha_{\text{Markt}\,1} \, \mu_{\text{Markt}\,1} + \ldots + \alpha_{\text{Markt}\,d} \, \mu_{\text{Markt}\,d}$$

Wenn das Marktportfolio optimales Rendite-Risiko-Verhältnis hat (Sharpe-Kriterium), gilt

$$\alpha_{\text{Markt}} = \frac{a}{\|a\|}, \quad a = \Sigma^{-1} \mu_{\text{Markt}}$$

$$\Rightarrow \mu_{\text{Markt}} = \|a\| \, \Sigma \, \alpha_{\text{Markt}}, \quad \mu_{\text{Markt}}^{\text{PF}} = \alpha_{\text{Markt}}^{\text{T}} \left(\|a\| \, \Sigma \, \alpha_{\text{Markt}} \right)$$

$$\Rightarrow \|a\| = \frac{\mu_{\text{Markt}}^{\text{PF}}}{\alpha_{\text{Markt}}^{\text{T}} \Sigma \, \alpha_{\text{Markt}}}$$

$$\boxed{\mu_{\text{Markt}} = \frac{\mu_{\text{Markt}}^{\text{PF}}}{\alpha_{\text{Markt}}^{\text{T}} \Sigma \, \alpha_{\text{Markt}}} \, \Sigma \, \alpha_{\text{Markt}}}$$

Maximum Likelihood Methode

Familie von stetigen Verteilungen $\mathcal{P} = \{P_\vartheta \mid \vartheta \in \Theta\}$,

$\Theta \subseteq \mathbb{R}^M$ Parametermenge

n unabhängige Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$

Likelihood-Funktion $L_{x_1,\ldots,x_n}(\vartheta) = p_\vartheta(x_1) \cdot \ldots \cdot p_\vartheta(x_n)$

Maximum Likelihood-Schätzer $\widehat{\vartheta}$ erfüllt

$$L_{x_1,\ldots,x_n}(\widehat{\vartheta}) \geq L_{x_1,\ldots,x_n}(\vartheta) \text{ für alle } \vartheta \in \Theta$$

Log-Likelihood-Funktion

$$\ell_{x_1,\ldots,x_n}(\vartheta) = \ln L_{x_1,\ldots,x_n}(\vartheta) = \sum_{j=1}^{n} \ln p_\vartheta(x_j)$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\,\ell_{x_1,\ldots,x_n}(\vartheta) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\vartheta}\,L_{x_1,\ldots,x_n}(\vartheta) = 0$$

m Beobachtungen des Marktes

beobachtete Returns $r_j \in \mathbb{R}^d$, $r_j \stackrel{d}{=} N(\mu, \Sigma)$ $(1 \leq j \leq m)$

Familie von Verteilungen $\mathcal{N} = \left\{ N(\mu, \Sigma) \,|\, \mu \in \Theta = \mathbb{R}^d \right\}$ (Σ fest)

$$p_\mu(r_j) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(r_j - \mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(r_j - \mu) \right)$$

$$\ell_{r_1,\ldots,r_m}(\mu) = c - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}(r_j - \mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(r_j - \mu)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \, \ell_{r_1,\ldots,r_m}(\mu) &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \nabla_\mu \, (r_j - \mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(r_j - \mu) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Sigma^{-1}(r_j - \mu) = \Sigma^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^{m} r_j - m\,\mu \right\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\widehat{\mu}_{\text{Markt}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} r_j}$$

n Beobachtungen des Investors

beobachtete Returns $q_i \in \mathbb{R}^k$, $q_i \overset{d}{=} N(P\mu, \Omega)$ $(1 \leq i \leq n)$ mit

Auswahlmatrix $P \in \mathbb{R}(k,d)$ und $\Omega = \operatorname{diag}(\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2)$.

$$p_\mu(q_i) = \frac{1}{(2\pi)^k \sqrt{\det \Omega}} \exp\left(-\frac{1}{2} (q_i - P\mu)^{\mathrm{T}} \Omega^{-1} (q_i - P\mu) \right)$$

$$\boxed{\widehat{q}_{\text{Investor}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} q_i}$$

Insgesamt $m+n$ Beobachtungen $r_1, \ldots, r_m, q_1, \ldots, q_n$

$$\begin{aligned} \ell_{r_1,\ldots,r_m,q_1,\ldots,q_n}(\mu) \quad &= \quad c - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (r_j - \mu)^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} (r_j - \mu) \\ &\qquad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (q_i - P\mu)^{\mathrm{T}} \Omega^{-1} (q_i - P\mu) \end{aligned}$$

Black Litterman Returns $\widehat{\mu}_{\mathrm{BL}}$ (1)

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu \, \ell(\mu) &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \nabla_\mu \, (r_j - \mu)^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} (r_j - \mu) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \nabla_\mu \, (q_i - P\mu)^{\mathrm{T}} \Omega^{-1} (q_i - P\mu) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \Sigma^{-1} (r_j - \mu) + \sum_{i=1}^{n} P^{\mathrm{T}} \Omega^{-1} (q_i - P\mu) \\
&= \Sigma^{-1} \left(\sum_{j=1}^{m} r_j - m\,\mu \right) + P^{\mathrm{T}} \Omega^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i - n\,P\,\mu \right) \\
&= m \Sigma^{-1} \left(\widehat{\mu}_{\mathrm{Markt}} - \mu \right) + n P^{\mathrm{T}} \Omega^{-1} \left(\widehat{q}_{\mathrm{Investor}} - P\mu \right) \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}
$$

Black Litterman Returns $\widehat{\mu}_{\mathrm{BL}}$ (2)

Wir setzen $\tau = n/m$, dann soll gelten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\tau}\Sigma^{-1}(\widehat{\mu}_{\mathrm{Markt}} - \mu) + P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}(\widehat{q}_{\mathrm{Investor}} - P\mu) \\ &= (\tau\Sigma)^{-1}\widehat{\mu}_{\mathrm{Markt}} - (\tau\Sigma)^{-1}\mu + P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}\widehat{q}_{\mathrm{Investor}} - P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\mu \end{aligned}$$

$$(\tau\Sigma)^{-1}\widehat{\mu}_{\mathrm{Markt}} + P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}\widehat{q}_{\mathrm{Investor}} = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right]\,\mu$$

$$\boxed{\widehat{\mu}_{\mathrm{BL}} = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\widehat{\mu}_{\mathrm{Markt}} + P^{\mathrm{T}}\Omega^{-1}\widehat{q}_{\mathrm{Investor}}\right]}$$

$$= \widehat{\mu}_{\mathrm{Markt}} + \tau\Sigma P^{\mathrm{T}}\left[\Omega + \tau P\Sigma P^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\left[\widehat{q}_{\mathrm{Investor}} - P\mu\right]$$

Literatur

[1] Victor DeMiguel, Lorenzo Garlappi und Raman Uppal: How Inefficient is the $1/N$ Asset-Allocation Strategy? *Review of Financial Studies* 2007 (im Erscheinen).

[2] Wolfgang Drobetz: Einsatz des Black-Litterman Verfahrens in der Asset Allocation. WWZ/Department of Finance Working Paper No. 3/02, Universität Basel 2002.

[3] Charlotta Mankert: The Black Litterman Model – mathematical and behavioral finance approaches towards its use in practice. Licentiate Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm 2006.

[4] Attilio Meucci: *Risk and Asset Allocation*. Springer Finance 2005.